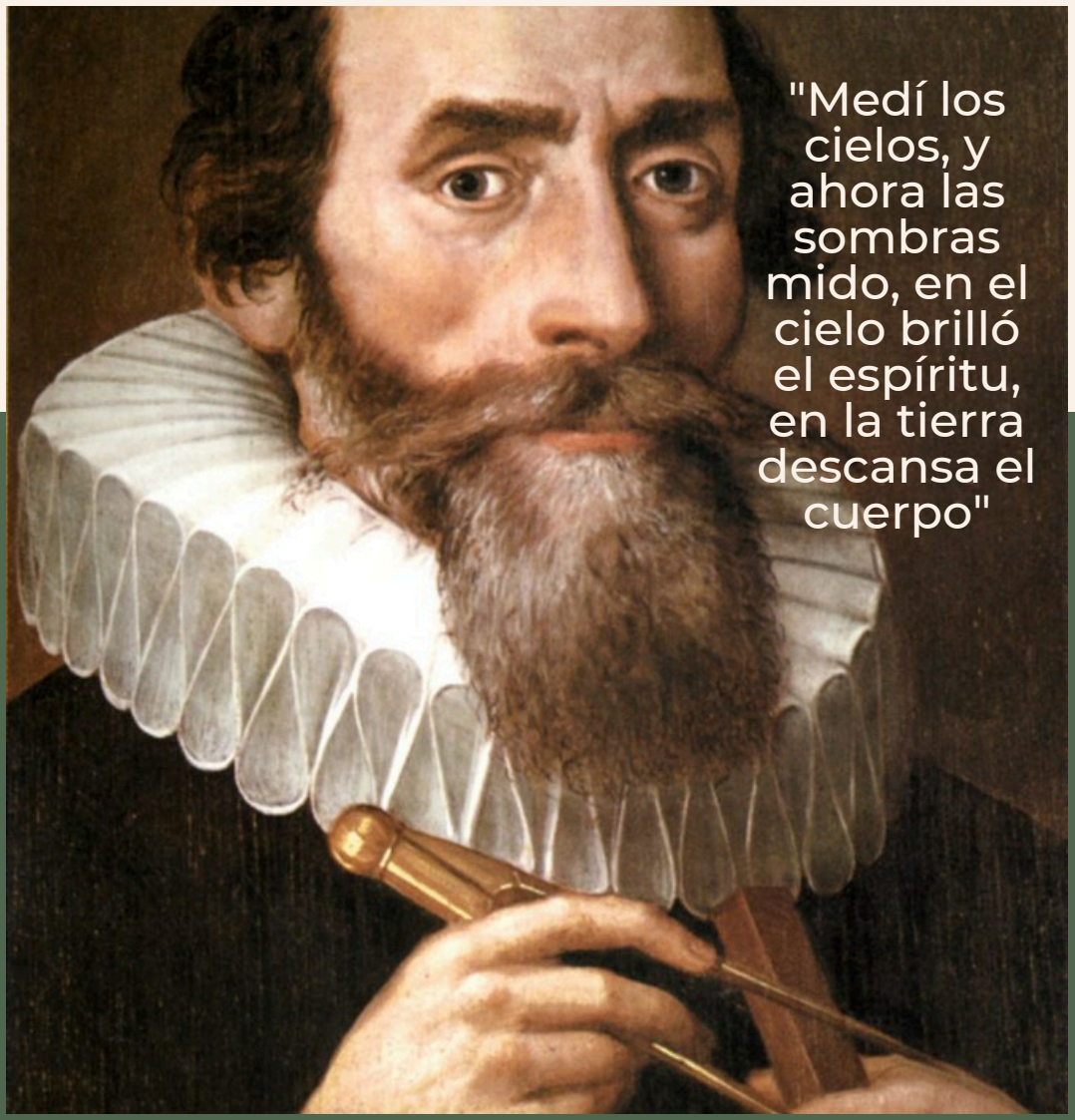
Incógnita X

UNA REVISTA DE ESTUDIANTES PARA ESTUDIANTES

Revista de Matemáticas del CCH-N

25 DE NOVIEMBRE 2024

volumen 14

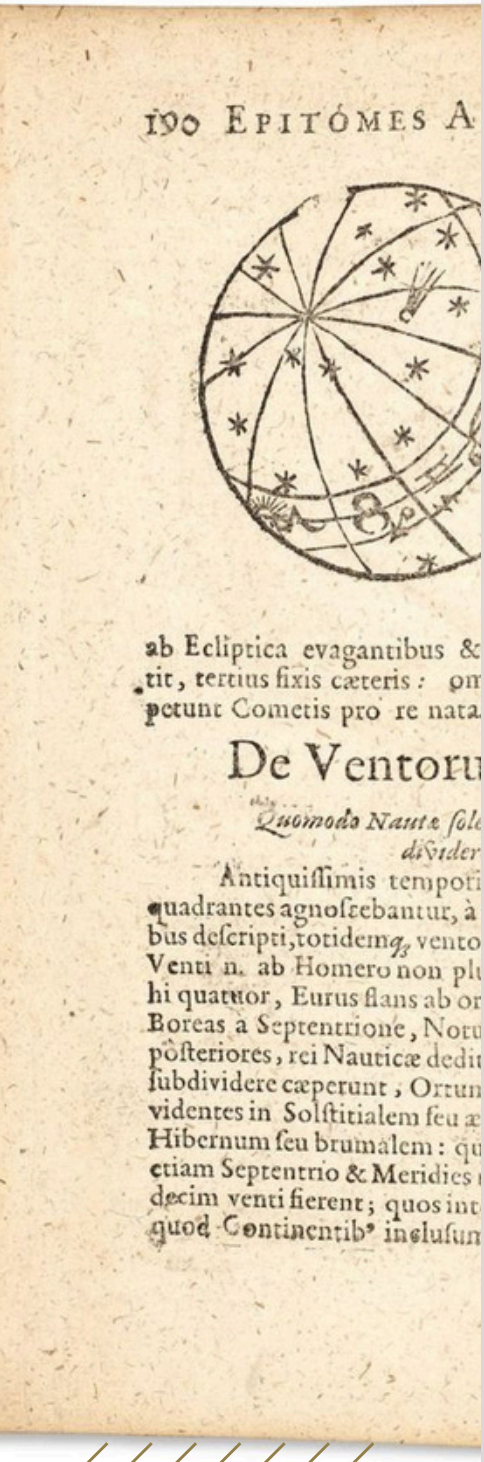


Johannes Kepler

Programa Jóvenes Hacia la Investigación en Ciencias Naturales y Matemáticas

UNAM Nuestra gran Universidad

ÍNDICE


190 EPITOMES A

ab Ecliptica evagantibus &
tit, tertius fixis cæteris :
petunt Cometis pro re nata

De Ventoru

Quomodo Nautæ
divider

Antiquissimis tempori
quadrantes agnoscebantur, à
bus descripti, totidemq; vento
Venti n. ab Homero non plu
hi quatuor, Eurus flans ab or
Boreas a Septentrione, Notu
posteriores, rei Nauticæ dedit
subdividere cæperunt, Ortun
videntes in Solstitialem seu æ
Hibernum seu brumalem : qu
etiam Septentrio & Meridies
decim venti fierent ; quos int
quod Continentib⁹ inclusun

01 Editorial

02 Matemáticos en la historia
Johannes Kepler

03 Las leyes de Kepler y el estudio de la Elipse

04 ¿Sabías qué?

05 Notas informativas y de interés

06 La elipse y su ecuación cartesiana

07 Ejercicios y retos

08 Juegos matemáticos

09 Referencias bibliográficas

10 Créditos

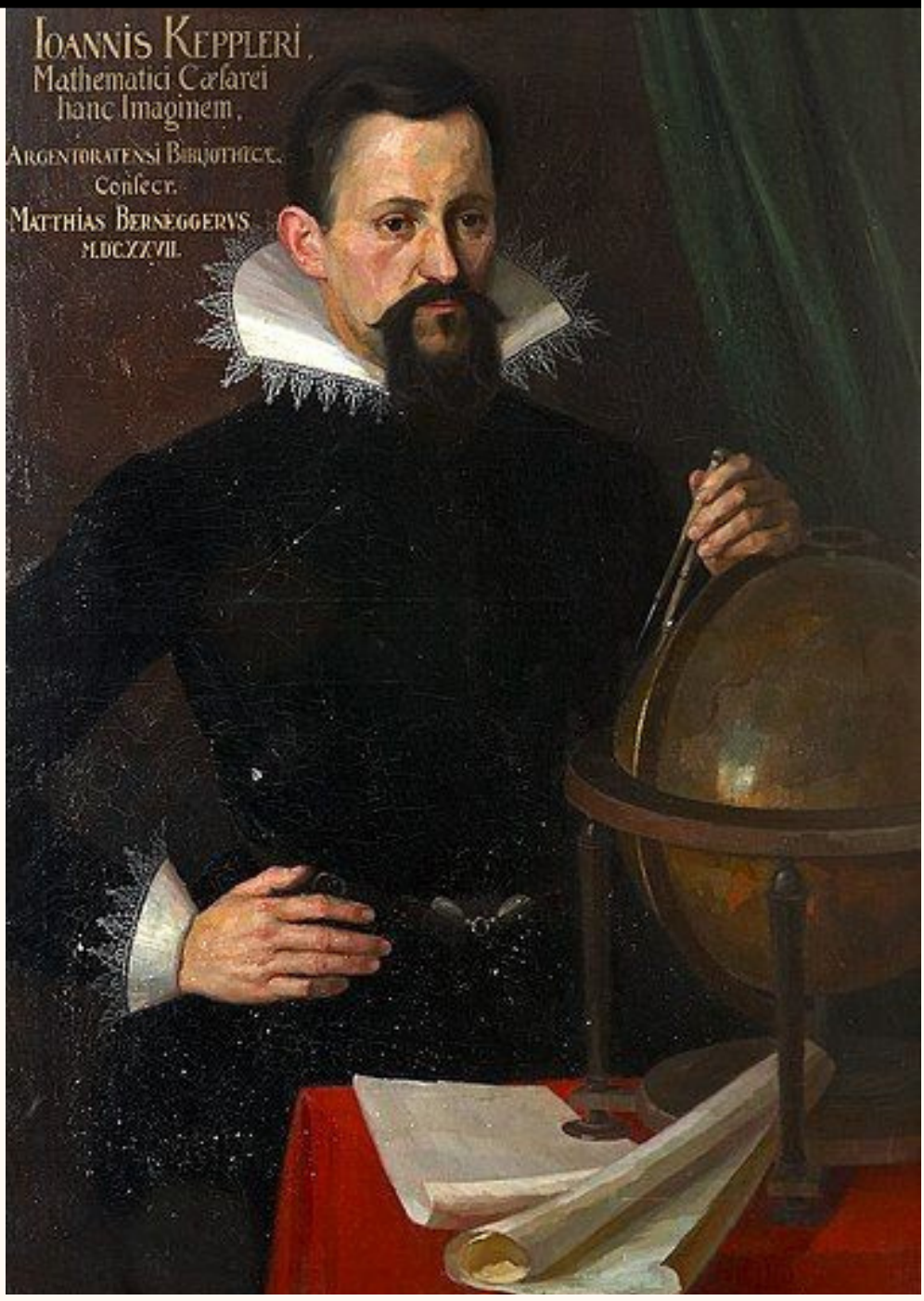
EDITORIAL

Las matemáticas son mucho más que números, fórmulas o ecuaciones. Son el lenguaje con el que desciframos el universo y el pilar de los avances más asombrosos de la humanidad. Sin embargo, detrás de cada descubrimiento matemático hay una historia, personas cuyas mentes brillantes transformaron la abstracción en herramientas prácticas que han moldeado nuestra civilización.

En Incógnita X exploramos la vida de los grandes matemáticos que con sus ideas llegaron a cambiar el mundo, desde sus logros hasta los retos que enfrentaron. Cada edición es una ventana a las mentes brillantes que transformaron el caos en conocimiento.

Bienvenidos a Incógnita X. Acompáñanos en este viaje donde la matemática y la historia se entrelazan para contar una historia fascinante.

JOHANNES KEPLER

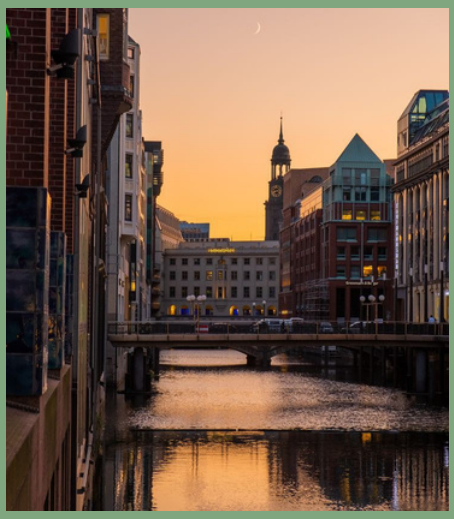


Johannes Kepler fue una figura clave de la Revolución Científica que sucedió entre los siglos XVI y XVII. Es recordado principalmente por haber descubierto las leyes que rigen el movimiento de los planetas de nuestro Sistema Solar.

También realizó trabajos importantes en óptica, en matemáticas y completó las Tablas Rudolfinas, instrumentos astronómicos que sirven para hacer más fáciles los cálculos necesarios para determinar las posiciones de los planetas, cuya precisión ayudó a establecer la veracidad del sistema heliocéntrico.

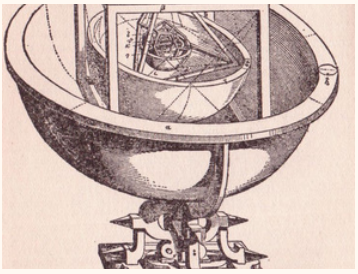
Parte de su vida

Kepler nació en Weil der Stadt, cerca de Sttutgart (Alemania), en 1571. De naturaleza frágil y enfermiza, contrajo la viruela a los tres años, lo que debilitó considerablemente su vista. Pero pronto destacó en matemáticas y se interesó por la astronomía. Ingresó en un Seminario protestante en 1584 y estudió después en la Universidad de Tubinga. En 1594 abandona sus estudios de teología y comienza a enseñar matemáticas en una escuela de Graz. En 1600 conoció a Tycho Brahe en Praga y cuando murió este último le sustituyó como matemático imperial de Rodolfo II. A partir de 1612 vivió en Linz hasta 1626 cuando tuvo que abandonar la ciudad tras un asedio militar. Kepler murió en 1630 en Ratisbona (Alemania)



AQUEL QUE DESCUBRIO LO GRANDIOSO

Todo el mundo conoce el legado teórico de Isaac Newton, sin embargo, pocos saben quién consiguió que se entendiese mejor el universo, y quién le otorgó las tablas para inspirar sus ideas gravitatorias. El culpable de todo es Johannes Kepler, conocido principalmente por descubrir y describir las 3 leyes que explican el movimiento de los planetas alrededor del Sol y que más adelante explicaremos.



Modelo de los sólidos platónicos del Sistema Solar, según Johannes Kepler.

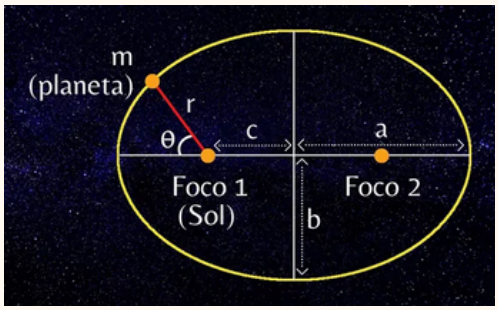
Las andaduras de Kepler comenzaron a los 18 años en la Universidad de Tubinga, donde estudió teología, lenguas antiguas y ciencias clásicas. Allí descubrió la teoría heliocéntrica de Nicolás Copérnico de la mano de su mentor Michael Maestlin.

LEYES DE KEPLER

¿Que son las leyes de Kepler?

Las leyes de Kepler constituyen la base de la mecánica planetaria y sus estudios afianzaron otros principios científicos como los propuestos por Newton para el movimiento y la gravedad. Hay tres leyes: la ley de las órbitas, la ley de las áreas y la ley de los períodos.

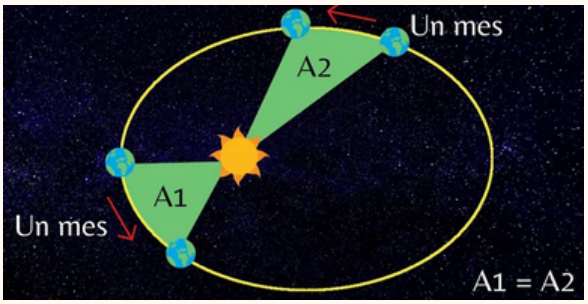
Primera ley: Ley de órbitas



Determina que los planetas giran alrededor del Sol describiendo una órbita con forma de elipse. El Sol se ubica en uno de los focos de la elipse.

Segunda ley: Ley de áreas

Establece que el radio vector barre áreas equivalentes en un mismo intervalo de tiempo.
El radio vector es una línea imaginaria que conecta a un planeta con el Sol. Por lo tanto, su longitud varía según la distancia entre ambos.

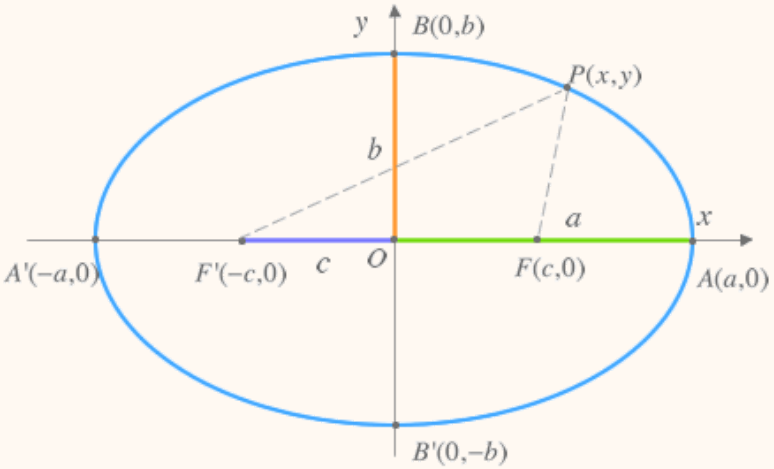


Tercera ley: Ley de los períodos

Permite comparar las características del movimiento de los planetas entre sí. La comparación toma en cuenta el período orbital y el radio de órbita de cada planeta.
El período orbital es el tiempo que demora un planeta en dar la vuelta completa al Sol. El radio de la órbita es el semieje mayor de la elipse.

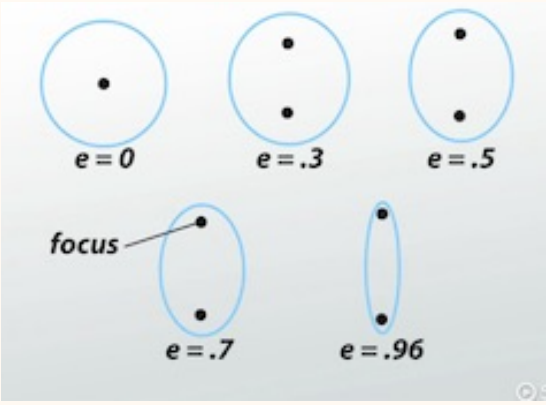
KEPLER Y EL ESTUDIO DE LA ELIPSE

Las órbitas elípticas las describió Johannes Kepler en sus Leyes del movimiento de los planetas. Su definición original era:
Primera Ley: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse. (a y b con semejantes a la elipse).



Esta Ley la encontró probando diversas formas para las órbitas, intentando encontrar un patrón matemático que encajara con las observaciones, principalmente las del astrónomo Tycho Brahe.
La definición moderna y fácil de entender dice esta primera ley dice que “todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, en las que el Sol está situado en uno de los focos”.
Considerando que los planetas se mueven alrededor del sol en una elipse, el semieje mayor es igual a la distancia promedio de un planeta al sol, con el sol ubicado en un foco de la elipse y nada ubicado en el otro foco.

Una elipse tiene un componente crítico llamado excentricidad *(o pequeña e)*, la medida en que una órbita se desvía de un círculo. La excentricidad es igual a la distancia entre los dos focos de una elipse dividida por el eje mayor.
La excentricidad nos dice la forma de la elipse y su valor varía de 0 a 1. Una elipse con 0 excentricidad es una circunferencia y cuando la excentricidad se acerca a 1, la forma de la elipse se vuelve casi una línea recta. Es decir, cuanto mayor es la excentricidad, más alargada es la elipse.



EL GOLPE DE SUERTE DE KEPLER CON SU ENEMIGO.

En febrero de 1600, Tycho Brahe un famoso astrónomo danés, invitó a Kepler a ser su asistente, pero los dos no se llevaron bien. Sin embargo, cada uno conocía el valor del otro y finalmente llegaron a un acuerdo. Kepler se mudó a Praga el mismo año y durante la mayor parte de 1601 trabajó como asistente de Tycho. Lucharon continuamente durante este tiempo ya que Tycho se negó a compartir todas sus meticulosas observaciones con Kepler. Tycho murió de uremia el 24 de octubre de 1601 y dos días después Kepler fue nombrado su sucesor como matemático imperial.

SU MADRE, ACUSADA Y JUZGADA POR BRUJERÍA

EL hermano de Kepler, estuvo involucrado en una disputa financiera con una mujer llamada Ursula quien afirmó que la madre de Kepler, Katharina, la había enfermado con una infusión malvada. La disputa se intensificó y Katharina fue acusada de brujería. Finalmente, hubo una cacería de brujas en la región y Katharina fue una de las 15 mujeres acusadas. Johannes, quien preparó una defensa extensa para su madre, jugó un papel en asegurar su liberación. Además, uno de sus amigos estudiantes, Christopher, la ayudó jurídicamente. finalmente Katharina fue encarcelada en agosto de 1620 pero puesta en libertad 14 meses después, en octubre de 1621. Ella murió al año siguiente.

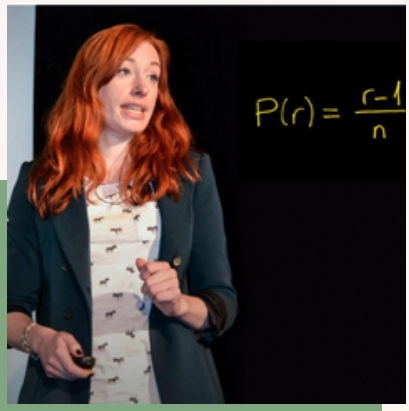
QUIEN DESPERTO SU INTERES POR LA ASTRONOMÍA FUE SU MADRE.

La familia Kepler se había vuelto pobre cuando nació Johannes. A la edad de seis años, Johannes fue enviado a la escuela, pero pronto lo sacaron para ganar dinero para la familia trabajando como mesero en una posada. Se le introdujo a la astronomía a una edad temprana cuando su madre lo sacó por la noche para mostrarle cosas interesantes en los cielos, incluido el Gran Cometa de 1577 y un eclipse lunar. Kepler fue formalmente educado en latín y luego asistió al Seminario Protestante de Maulbronn. En 1589, a la edad de 18 años, una beca le permitió comenzar su educación universitaria en la Universidad Protestante de Tübinge (Alemania)

KEPLER NO ENCAJABA EN LA SOCIEDAD DE SU EPOCA

Tuvo que trasladarse varias veces por ser mal visto por los católicos por ser protestante, y por los protestantes por haber vivido entre católicos, dado esto tenía muchos problemas para convivir o encajar en la sociedad de esas épocas.

LAS MATEMÁTICAS PARA ENCONTRAR EL AMOR



La doctora Hannah Fry Investigadora de la University College London ha dedicado gran parte de su carrera a descubrir los patrones de comportamiento humanos.
Hanna Fry propone aplicar un área de las matemáticas, “la teoría de la decisión” a la búsqueda de pareja. La doctora asegura, que esto podría permitir elaborar una ecuación que predice cuántas posibles parejas se tienen que rechazar antes de encontrar a la media naranja.

En el capítulo siete de su libro “Las matemáticas de Amor, propone aplicar la llamada “la teoría de la decisión” a la búsqueda de pareja. La fórmula predice cuántas posibles parejas tienes que rechazar antes de encontrar a la pareja perfecta. Así sabremos en qué momento debemos dejar de buscar y quedarnos con la persona candidata que encontremos.

Para decidir, usamos el número e, que es aproximadamente 2.7182 y dividimos el número total de candidatos (n), para 10 candidatos:

$$\frac{n}{e} \approx \frac{10}{2.718} \approx 3.7$$

Esto significa que deberías rechazar a los primeros 4 candidatos (redondeando hacia arriba) y luego elegir al primero que sea mejor que los ya evaluados.

Siguiendo esta regla, tienes una probabilidad de aproximadamente 37% de encontrar "la mejor opción".

EL DESFILE POR EL 114 ANIVERSARIO DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA.

La historia oficial de México marca el 20 de noviembre de 1910 como el inicio de la Revolución Mexicana. Este año la conmemoración ha sido presidida por primera vez por una mujer, la presidenta Claudia Sheinbaum

La presidenta de México, Claudia Sheinbaum, junto al secretario de Defensa, Ricardo Trevilla Trejo, y el secretario de Marina, Raymundo Pedro Morales.

Durante el evento se realizan escenificaciones de momentos clave de la Revolución, trajes típicos de diferentes Estados del país y la participación de las fuerzas armadas mexicanas.

La historia oficial de México marca el 20 de noviembre de 1910 como el inicio de la Revolución Mexicana, un movimiento social que se levantó en contra de Porfirio Díaz.

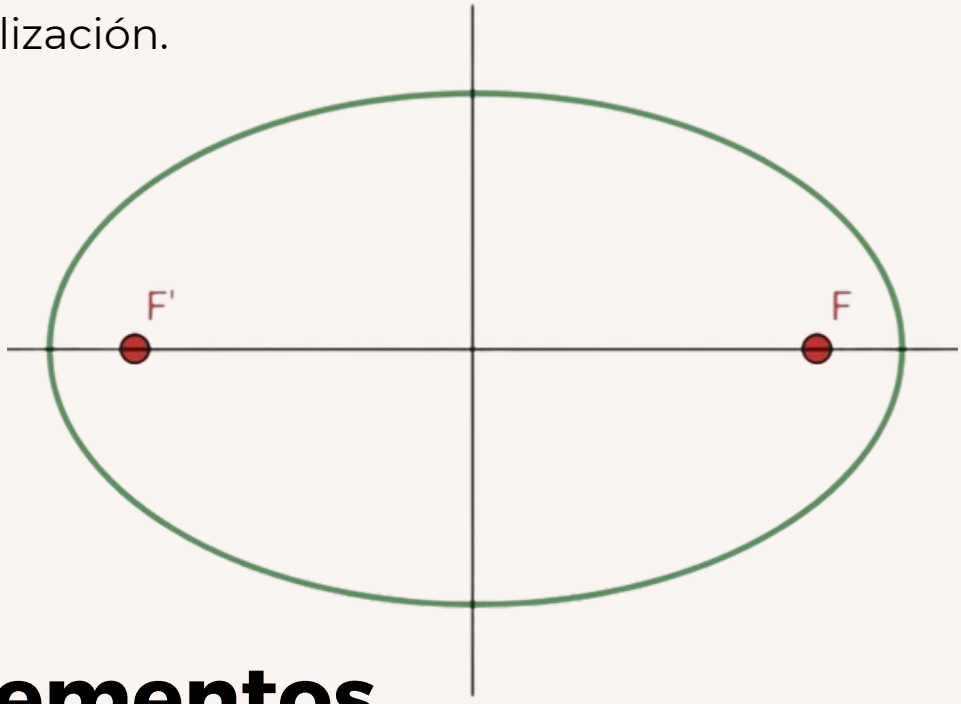
Este 2024 tiene otro tinte histórico porque por primera vez ha sido presidido por una mujer, la presidenta Claudia Sheinbaum.

Elementos del Ejército Mexicano, Marina, Fuerza Aérea Mexicana y la Guardia Nacional participaron en el desfile.

La Elipse

Definición

La elipse es una figura plana que se asemeja a una forma ovalada o estirada. Se puede definir como el lugar geométrico de todos los puntos en un plano, donde la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta propiedad distintiva de la elipse es conocida como la propiedad de focalización.



Elementos

La elipse tiene varios elementos clave que nos ayudan a comprender su estructura:

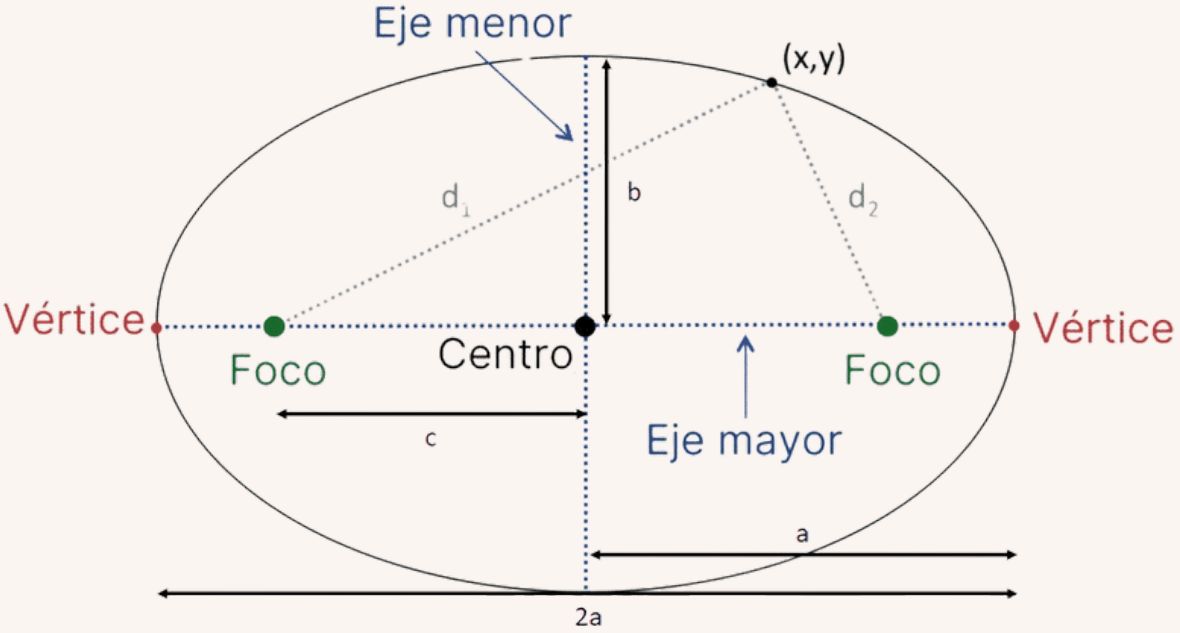
Centro: Como su nombre lo indica, es el punto central de la elipse y es donde se intersecan los ejes mayor y menor.

Focos: Son dos puntos localizados sobre el Eje mayor, no son arbitrarios y entre más parecida sea una elipse a una circunferencia, la distancia entre ellos se reduce. Si dicha distancia es cero, entonces la curva es una circunferencia.

Eje mayor: Segmento de recta localizado entre los vértices de la Elipse. Su longitud equivale a la suma de la distancia de cada foco a un punto cualquiera de la elipse, lo que da pauta a la definición de este lugar geométrico.

Eje menor: Segmento de recta perpendicular al eje mayor cuyos extremos se localizan sobre la elipse. Su valor es necesario como dato para poder obtener la ecuación de la elipse.

Vértices: Puntos extremos del eje mayor. Algunos autores también denominan como vértices a los extremos del eje menor aunque no es muy utilizado.



Excentricidad: Se define como la razón entre la semidistancia focal y la longitud del eje mayor. La excentricidad siempre está entre 0 y 1, y es una medida de qué tan estirada está la elipse. Una elipse con una excentricidad cercana a 0 se asemeja más a un círculo, mientras que una excentricidad cercana a 1 indica una elipse más alargada.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Siendo a y b los semiejes mayor y menor de la elipse

Ecuación de la Elipse

La ecuación general de la elipse en un plano cartesiano nos permite representarla matemáticamente. Las ecuaciones de la elipse son:

Ecuaciones de la eclipse

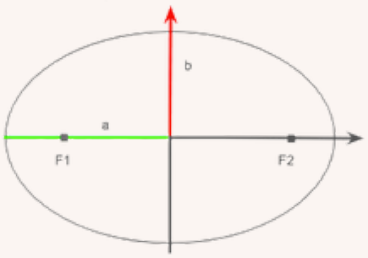
con el centro fuera del origen y el eje focal palelo a alguno de los ejes coordenados

Eclipse Horizontal

Forma Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Cuando: a > b



Forma General

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

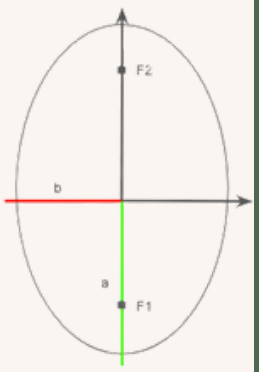
con A ≠ C y del mismo signo

Eclipse Vertical

Forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(x-k)^2}{a^2} = 1$$

Cuando: a > b



Forma General

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con A ≠ C y del mismo signo

Donde:

- a es la longitud del semieje mayor (la mitad del eje más largo de la elipse).
- b es la longitud del semieje menor (la mitad del eje más corto de la elipse).

Al igual que en la circunferencia, los nombres genéricos que se han dado a las coordenadas del centro de una elipse son “h” para la abscisa y “k” para la ordenada.

EJERCICIOS

Encuentra la gráfica, todos los elementos y la ecuación general de la elipse:

$$\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{100}=1$$

1. **Datos:**

$$a^2=100 \quad \Rightarrow \quad a=10, \quad b^2=36 \quad \Rightarrow \quad b=6$$
$$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2=100-36=64 \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{64}=8$$

2. **Coordenadas del centro:**

$$C(-3,1)$$

3. **Ejes:**

$$\text{Eje mayor: } 2a=20, \quad \text{Eje menor: } 2b=12$$

4. **Coordenadas de los vértices:**

$$V_1(-3,11), \quad V_2(-3,-9)$$

5. **Coordenadas de los focos:**

$$F_1(-3,9), \quad F_2(-3,-7)$$

6. **Lado recto:**

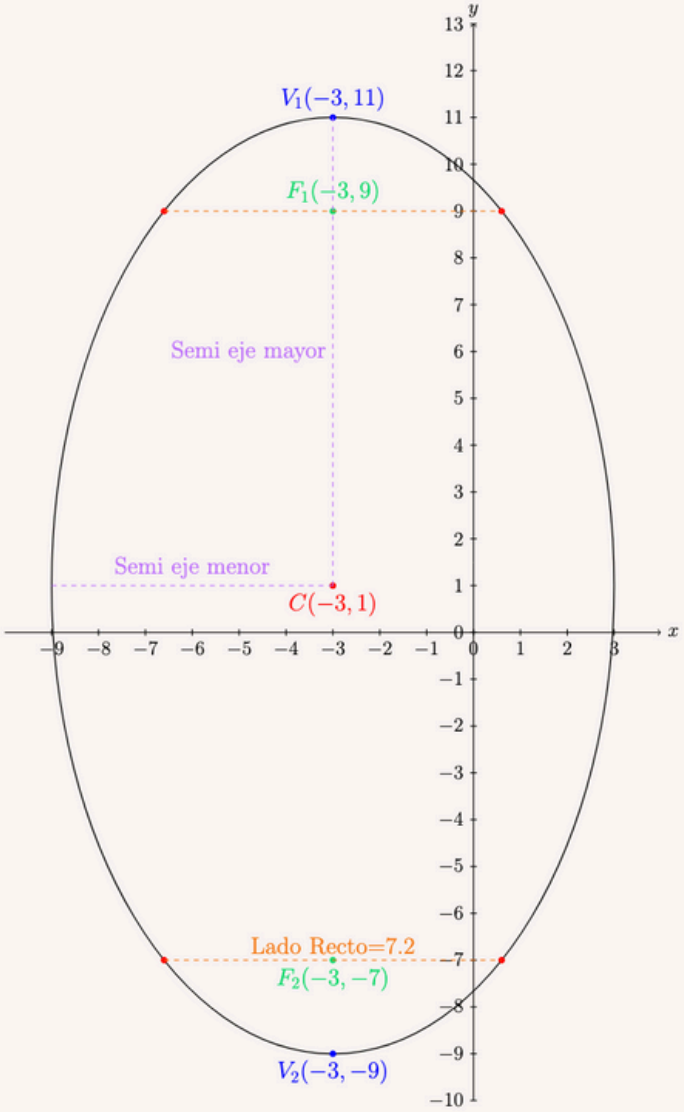
$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 36}{10}=7.2$$

7. **Excentricidad:**

$$e=\frac{c}{a}=\frac{8}{10}=0.8$$

8. **Distancia focal:**

$$d=2c=2\cdot 8=16$$



Ecuación general

$$\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{100}=1$$

$$\frac{100(x+3)^2+36(y-1)^2}{3600}=1$$

Multiplicando por 3600:

$$100(x+3)^2+36(y-1)^2=3600$$

Expandiendo:

$$100(x^2+6x+9)+36(y^2-2y+1)=3600$$

$$100x^2+600x+900+36y^2-72y+36=3600$$

$$100x^2+36y^2+600x-72y-2664=0$$

DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE A SU FORMA ORDINARIA

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \longrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

a) Determina la longitud del eje mayor, la longitud del eje menor y distancia focal.
b) Determina las coordenadas del centro, vértices y focos.
c) Realiza la gráfica.

Para la elipse que tiene la ecuación

$$4x^2 + 2y^2 - 32x - 24y + 64 = 0$$

1. AGRUPAR: $4x^2 - 32x + 2y^2 - 24y = -64$

2. FACTORIZAR: $4(x^2 - 8x) + 2(y^2 - 12y) = -64$

3. COMPLETAR EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

$$4(x^2 - 8x + 4^2) + 2(y^2 - 12y + 6^2) = -64 + 4(4^2) + 2(6^2)$$

$$4(x-4)^2 + 2(y-6)^2 = 72$$

$$\frac{4(x-4)^2}{72} + \frac{2(y-6)^2}{72} = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$$

Solución

1.Datos:

$$a^2 = 36 \qquad a = 6$$

$$b^2 = 18 \qquad b = \sqrt{18} = 4.24$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 18 = 18$$

$$c = \sqrt{18} = 4.24$$

2.Lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 18}{6} = 6$$

3. Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{18}}{6} = 0.7$$

a) Eje mayor: $2a = 12$

Eje menor: $2b = 2\sqrt{18}$

Distancia Focal: $2\sqrt{18}$

b) Coordenadas de los vértices ,focos y centro:

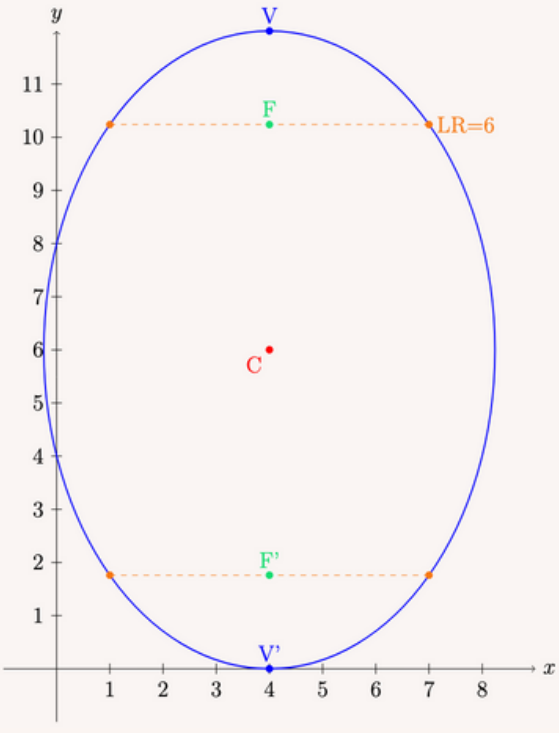
$$V_1(4, 0)$$

$$V_2(4, 12)$$

$$F_1(4, 10.24)$$

$$F_2(4, 1.76)$$

$$C(4, 6)$$



Reto Incógnita X

Resuelve **uno** de los dos problemas y los **dos** juegos y envíalos a la siguiente dirección:

incognitaxcch@gmail.com

1. Encuentra la ecuación y gráfica de la elipse de focos en las coordenadas f'(0,-6) y f(0,6) y longitud de eje mayor de 20 unidades.

2. Se han consumido los 3/7 de una vela de cera. ¿Cuál era la longitud inicial de la vela si el trozo que queda mide 24 cm?

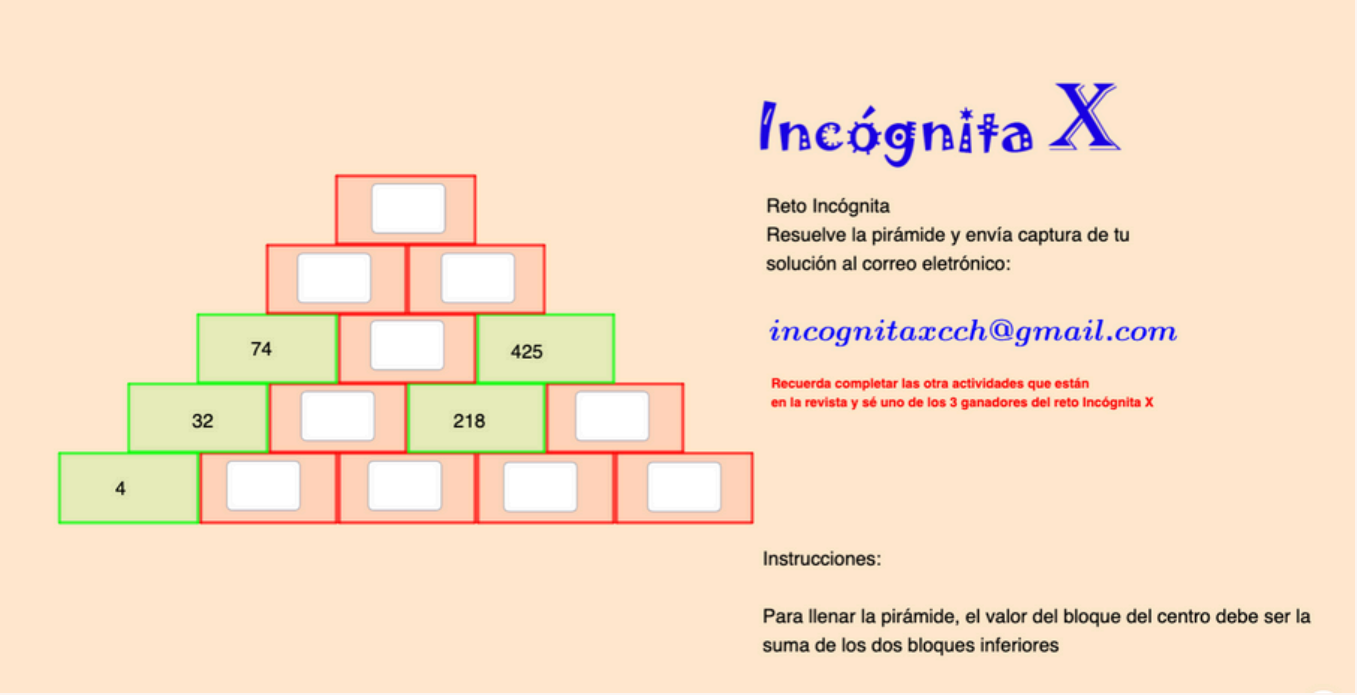
Juego 1: Sudoku

Resuélvelo en la siguiente dirección :

https://www.geogebra.org/m/gbc72wau

Juego 2: Pirámide matemática

El valor del bloque del centro debe ser la suma de los dos bloques inferiores



Resuélvelo en la siguiente dirección :

https://www.geogebra.org/m/qhgvejwa

Bibliografía

Cordova, D. G., Flores, E. N., García, R. R., & Salvador, J. C. R. (s/f). Johannes Kepler y las leyes del movimiento planetario. Ciencia UNAM. Recuperado el 20 de noviembre de 2024, de https://ciencia.unam.mx/leer/1184/johannes-kepler-y-las-leyes-del-movimiento-planetario

Tavo. (2020, abril 13). Kepler, Galileo y la Nueva Astronomía. Otraparte.org; Corporación Otraparte. https://www.otraparte.org/agenda-cultural/ciencia/galileo-kepler/

García, B. (2018, agosto 19). Johannes Kepler, una figura clave para las teorías astrofísicas. Blogthinkbig.com. https://blogthinkbig.com/johannes-kepler-figura-clave-en-las-teorias-astronomicas

Cruzito. (2020, noviembre 3). Leyes, elipses y excentricidad de Kepler. Estudyando. https://estudyando.com/leyes-elipses-y-excentricidad-de-kepler/

De, E. (2020, septiembre 7). Leyes de Kepler. Enciclopedia Significados. https://www.significados.com/leyes-de-kepler/

Fry, H. (2015). The Mathematics of Love: Patterns, Proofs, and the Search for the Ultimate Equation. Simon & Schuster.

Kepler y las elipses planetarias. (s/f). Microsiervos. Recuperado el 18 de noviembre de 2024, de https://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/kepler-elipses-planetarias.html

(S/f). Geoenciclopedia.com. Recuperado el 18 de noviembre de 2024, de https://www.geoenciclopedia.com/leyes-de-kepler-que-son-y-en-que-consisten-792.html

Incógnita X

Elaborada por:

Arreguín Hernández Naim Yamile
Carrillo De Jesús Marlene
Fuentes Rocandio Shanath Valeria
Longino Curiel César Luis
Ramírez Zarrabal Erick Elihú

Responsable de la revista:

Dr. Juan Carlos Ramírez Maciel